Ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot (en noir)

Zoom sur une partie de l'ensemble. On remarque l'[autosimilarité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Autosimilarit%C3%A9) des structures.

**L'ensemble de Mandelbrot** est une [fractale](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale) définie comme l'[ensemble](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble) des points *c* du [plan complexe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Plan_complexe) pour lesquels la [suite](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_(math%C3%A9matiques)) de [nombres complexes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_complexes) [définie par récurrence](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_d%C3%A9finie_par_r%C3%A9currence) par :

est [bornée](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_born%C3%A9e).

L'ensemble de Mandelbrot a été découvert par [Gaston Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia) et [Pierre Fatou](http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fatou)[1](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-1) avant la première guerre mondiale. Sa définition et son nom actuel sont l'œuvre d'[Adrien Douady](http://fr.wikipedia.org/wiki/Adrien_Douady), en hommage aux représentations qu'en a réalisées [Benoît Mandelbrot](http://fr.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot) alors qu'il travaillait chez [IBM](http://fr.wikipedia.org/wiki/IBM). Cet ensemble permet d'indicer les[ensembles de Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Julia) : à chaque point du plan complexe correspond un ensemble de Julia différent ; ces points de l'ensemble de Mandelbrot correspondent précisément aux ensembles de Julia [connexes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Connexit%C3%A9_(math%C3%A9matiques)), et ceux en dehors correspondent aux ensembles de Julia non connexes.

**Sommaire**

  [[masquer](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot)]

* [1 Historique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Historique)
* [2 Propriétés](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Propri.C3.A9t.C3.A9s)
  + [2.1 Définition](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#D.C3.A9finition)
  + [2.2 Barrière du module égal à 2](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Barri.C3.A8re_du_module_.C3.A9gal_.C3.A0_2)
  + [2.3 Géométrie élémentaire](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#G.C3.A9om.C3.A9trie_.C3.A9l.C3.A9mentaire)
  + [2.4 Connexité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Connexit.C3.A9)
  + [2.5 Autosimilarité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Autosimilarit.C3.A9)
  + [2.6 Universalité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Universalit.C3.A9)
  + [2.7 Dimension de Hausdorff](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Dimension_de_Hausdorff)
  + [2.8 Lien avec l'équation logistique](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Lien_avec_l.27.C3.A9quation_logistique)
  + [2.9 Lien avec les ensembles de Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Lien_avec_les_ensembles_de_Julia)
  + [2.10 Bourgeons, antennes et périodicités](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Bourgeons.2C_antennes_et_p.C3.A9riodicit.C3.A9s)
* [3 Dessiner l'ensemble](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Dessiner_l.27ensemble)
  + [3.1 Un zoom commenté](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Un_zoom_comment.C3.A9)
* [4 Généralisations et variantes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#G.C3.A9n.C3.A9ralisations_et_variantes)
* [5 Logiciels générateurs de fractales](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Logiciels_g.C3.A9n.C3.A9rateurs_de_fractales)
* [6 Notes et références](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Notes_et_r.C3.A9f.C3.A9rences)
* [7 Voir aussi](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#Voir_aussi)

Historique[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=1) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=1)]

[Benoît Mandelbrot](http://fr.wikipedia.org/wiki/Beno%C3%AEt_Mandelbrot)

L'ensemble de Mandelbrot tire ses origines de la [dynamique complexe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Dynamique_holomorphe), un domaine défriché par les mathématiciens français [Pierre Fatou](http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fatou) et [Gaston Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia) au début duxxe siècle.

La première représentation de cet ensemble apparaît en 1978 dans un article de [Robert Brooks](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Robert_Brooks&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Robert_W._Brooks) et Peter Matelski[2](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-2).

Le 1er mars 1980, au [centre Thomas J. Watson](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Centre_de_recherche_Thomas_J._Watson&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_J._Watson_Research_Center) de [recherche IBM](http://fr.wikipedia.org/wiki/IBM_Research) (dans l'[État de New York](http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89tat_de_New_York)), [Benoit Mandelbrot](http://fr.wikipedia.org/wiki/Benoit_Mandelbrot) obtient pour la première fois, une visualisation par ordinateur de cet ensemble[3](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-bf-3). Mandelbrot étudie l'espace des paramètres des [polynômes quadratiques](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_du_second_degr%C3%A9) complexes dans un article publié en 1980[4](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-4).

En 1984, l'étude de l'ensemble de Mandelbrot commence réellement avec les travaux d'[Adrien Douady](http://fr.wikipedia.org/wiki/Adrien_Douady) et de [John H. Hubbard](http://fr.wikipedia.org/wiki/John_H._Hubbard)[5](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-5), qui établissent ses propriétés fondamentales et baptisent l'ensemble en l'honneur de Mandelbrot.

En 1985, les mathématiciens [Heinz-Otto Peitgen](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Heinz-Otto_Peitgen&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Heinz-Otto_Peitgen) et Peter Richter popularisent l'ensemble de Mandelbrot par des images de qualité et qui frappent les esprits[6](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-6),[7](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-7),[8](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-8).

Dans le numéro d'août 1985 du magazine [*Scientific American*](http://fr.wikipedia.org/wiki/Scientific_American), l'ensemble de Mandelbrot est présenté au grand public comme « l'objet mathématique le plus complexe jamais découvert » et présente l'algorithme qui permet de le tracer soi-même. La couverture de ce numéro reprend une image créée par Peitgen[9](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-9),[10](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-10).

Les travaux de Douady et Hubbard coïncidaient avec un intérêt considérable pour la dynamique complexe et l'étude de l'ensemble de Mandelbrot a été le centre d'attention de ce domaine depuis. Parmi les mathématiciens qui apportèrent une contribution significative à l'étude de cet ensemble, il faut citer [Tan Lei](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Tan_Lei&action=edit&redlink=1) [**(de)**](http://de.wikipedia.org/wiki/Tan_Lei), [Mikhail Lyubich](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Mikhail_Lyubich&action=edit&redlink=1) [**(de)**](http://de.wikipedia.org/wiki/Mikhail_Lyubich), [Curtis T. McMullen](http://fr.wikipedia.org/wiki/Curtis_T._McMullen), [John Milnor](http://fr.wikipedia.org/wiki/John_Milnor), [Mitsuhiro Shishikura](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Mitsuhiro_Shishikura&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Mitsuhiro_Shishikura) et [Jean-Christophe Yoccoz](http://fr.wikipedia.org/wiki/Jean-Christophe_Yoccoz).

Propriétés[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=2) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=2)]

**Définition**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=3) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=3)]

La théorie générale, développée par [Pierre Fatou](http://fr.wikipedia.org/wiki/Pierre_Fatou) et [Gaston Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Gaston_Julia) au début du xxe siècle, associe à toute fonction (suffisamment [régulière](http://fr.wikipedia.org/wiki/Classe_de_r%C3%A9gularit%C3%A9)) *f*(*z*, *c*) (à arguments et valeurs [complexes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe)) les [ensembles de Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Julia) *Jc*, définis (pour un *c* fixé) comme la [frontière](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fronti%C3%A8re_(topologie)) de l'ensemble des *a* complexes tels que la suite définie par *z*0 = *a* et *zn*+1 = *f*(*zn*, *c*) reste [bornée](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_born%C3%A9e) (en [module](http://fr.wikipedia.org/wiki/Module_d%27un_nombre_complexe)) ; pour la fonction particulière *f*(*z*, *c*) = *z*2 + *c*, on définit l'ensemble de Mandelbrot *M* comme l'ensemble des *c* pour lequel *Jc* est [connexe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Connexit%C3%A9_(math%C3%A9matiques)). Fatou et Julia ont démontré[11](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-11) que cette définition est équivalente à celle donnée dans l'introduction, c'est-à-dire que *c* appartient à*M* si et seulement si la suite (*zn*) définie par *z*0 = 0 et *zn*+1 = *zn*2 + *c* reste bornée (en module) ; restant dans les [réels](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_r%C3%A9el), il s'agit donc des points de coordonnées (*a*,*b*) tels que les deux suites (*xn*) et (*yn*) définies par la récurrence *x*0 = *y*0 = 0 et *xn*+1 = *xn*2 – *yn*2 + *a* ; *yn*+1 = 2*xnyn + b* restent bornées.

**Barrière du module égal à 2**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=4) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=4)]

Si la suite des [modules](http://fr.wikipedia.org/wiki/Module_d%27un_nombre_complexe) des *zn* dépasse 2 pour un certain indice alors, cette suite est [croissante](http://fr.wikipedia.org/wiki/Suite_monotone) à partir de cet indice, et elle [tend vers l'infini](http://fr.wikipedia.org/wiki/Limite_d%27une_suite#Limite_infinie).

[[afficher]](javascript:BoiteDeroulante_toggle(0);)

**Démonstration**

Pour que la suite (*zn*) soit bornée, il [suffit](http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_suffisante) donc qu'elle ne tende pas vers l'infini, et il [faut](http://fr.wikipedia.org/wiki/Condition_n%C3%A9cessaire) qu'elle reste bornée par 2 (en module). Ceci fournit deux définitions de l'ensemble de Mandelbrot équivalentes à celle donnée en introduction, et prouve de plus que cet ensemble est inclus dans le [disque fermé](http://fr.wikipedia.org/wiki/Boule_(topologie)) de centre 0 et de rayon 2.

**Géométrie élémentaire**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=5) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=5)]

Géométrie élémentaire

L'ensemble *M* de Mandelbrot est [compact](http://fr.wikipedia.org/wiki/Compacit%C3%A9_(math%C3%A9matiques)), symétrique par rapport à l'axe réel et contient le disque fermé de centre 0 et de rayon 1/4.

Son intersection avec l'axe réel est le [segment](http://fr.wikipedia.org/wiki/Segment_(math%C3%A9matiques)) [–2, 1/4].

[[afficher]](javascript:BoiteDeroulante_toggle(1);)

**Démonstration**

Son [aire](http://fr.wikipedia.org/wiki/Aire_(g%C3%A9om%C3%A9trie)) est estimée autour de 1,50659177 ± 0,00000008[12](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-mrob-12).

Son [centre de gravité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Isobarycentre) est estimé à la position réelle –0,286 768 3 ± 0,000 000 1[12](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-mrob-12).

La principale structure remarquable est la [cardioïde](http://fr.wikipedia.org/wiki/Cardio%C3%AFde) centrale, de centre  et d'équation polaire  On peut aussi citer le [cercle](http://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle) de centre  et de rayon .

**Connexité**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=6) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=6)]

Douady et Hubbard ont montré, en 1985[13](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-13), que l'ensemble était connexe. Ce résultat n'était pas évident à l'observation des premiers tracés de Mandelbrot, qui faisait apparaître des « îlots » semblant détachés du reste. Pour ce faire, ils ont montré que le complémentaire de l'ensemble de Mandelbrot est [conformément isomorphe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Transformation_conforme) au complémentaire dans [ℂ](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_complexe) du [disque unité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Cercle_unit%C3%A9).

On conjecture que l'ensemble de Mandelbrot est [localement connexe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_localement_connexe)[14](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-14),[15](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-15),[16](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-16).

**Autosimilarité**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=7) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=7)]

Article connexe : [Autosimilarité](http://fr.wikipedia.org/wiki/Autosimilarit%C3%A9).

Autosimilarité autour d'un point de Misiurewicz −0,1011 + 0,9563i.

Autosimilarité près du point de Feigenbaum -1,401155

Des copies de l'ensemble dans l'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est [autosimilaire](http://fr.wikipedia.org/wiki/Autosimilarit%C3%A9) dans le [voisinage](http://fr.wikipedia.org/wiki/Voisinage_(math%C3%A9matiques)) des [points de Misiurewicz](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Point_de_Misiurewicz&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Misiurewicz_point). Ces points sont denses sur toute la [frontière](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fronti%C3%A8re_(topologie)) de l'ensemble. On conjecture qu'il est également autosimilaire, à la limite, autour des [points de Feigenbaum](http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombres_de_Feigenbaum) (ex : −1,401 155 ou −0,152 8 + 1,039 7 i)[17](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-17).

Des versions réduites de l'ensemble de Mandelbrot apparaissent sur toute sa frontière, jusqu'à des grossissements infinis, avec de légères différences[18](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-McMullen-18).

L'ensemble de Mandelbrot n'est pas, en général, strictement autosimilaire.

**Universalité**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=8) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=8)]

L'ensemble des points ne convergeant pas, pour une fonction cubique, par la méthode de Newton.

L'ensemble de Mandelbrot *M* a un caractère universel pour de nombreuses [fonctions holomorphes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_holomorphe)[18](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-McMullen-18). Des copies de *M* sont visibles sur les frontières de leurs *bassins d'attraction*, c'est-à-dire des ensembles des *c* pour lesquels les itérés *f*(*f*(…*f*(*z*)))) convergent vers un complexe donné. En voici quelques exemples, avec des [fonctions transcendantes](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_transcendante) :

* (fonction cosinus)
* (fonction de Gauss)

On retrouve également *M* lors de l'itération d'une famille de fonctions cubiques telles que , par la [méthode de Newton](http://fr.wikipedia.org/wiki/Fractale_de_Newton). L'ensemble des points  ne convergeant pas vers une racine de ce polynôme prend la forme de *M*.

Là encore, l'autosimilarité n'est pas stricte.

**Dimension de Hausdorff**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=9) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=9)]

La [dimension de Hausdorff](http://fr.wikipedia.org/wiki/Dimension_de_Hausdorff) de la frontière de l'ensemble de Mandelbrot vaut 2. Ce résultat a été démontré en 1990 par Mitsuhiro Shishikura[19](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-19). On ne sait pas si cette frontière a une [mesure de Lebesgue](http://fr.wikipedia.org/wiki/Mesure_de_Lebesgue) (surface) positive.

**Lien avec l'équation logistique**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=10) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=10)]

Correspondance entre l'ensemble de Mandelbrot et le diagramme de bifurcation de l'[équation logistique](http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_logistique)

Les paramètres de *M*, dans l'intervalle réel [–2, 1/4], peuvent être mis en correspondance bijective avec ceux de l'[équation logistique](http://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_logistique) :  la correspondance étant donnée par :

**Lien avec les ensembles de Julia**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=11) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=11)]

Cette section est vide, insuffisamment détaillée ou incomplète. [Votre aide](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit) est la bienvenue !

L'ensemble de Mandelbrot *M* peut être défini comme l'ensemble des complexes *c* pour lesquels l'[ensemble de Julia](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Julia) correspondant, *Jc*, est connexe. Mais, plus précisément, on a (à la limite) identité entre *Jc* et *M* au voisinage de *c*, lorsque *c* appartient à la frontière de *M*[20](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-20).

**Bourgeons, antennes et périodicités**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=12) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=12)]

Bourgeons et périodicités

L'ensemble de Mandelbrot fait apparaître nombre de structures en forme de bourgeons entourant une structure principale en forme de [cardioïde](http://fr.wikipedia.org/wiki/Cardio%C3%AFde).

* La cardioïde est l'ensemble des points *c* qui convergent vers un [point fixe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Point_fixe) (période 1). Ce sont les points de la forme  pour tout  appartenant au disque unité.
* Le bourgeon principal, à gauche de la cardioïde, lui est attaché au point *c* = –3/4. Il s'agit d'un disque centré en *c* = –1 et de rayon 1/4. Il s'agit de l'ensemble des points paramètres qui, à la limite, convergent vers un cycle de période 2.
* Les autres bourgeons tangents à la cardioïde sont les points admettant d'autres périodicités. Pour tout nombre rationnel p/q, avec *p* et *q* premiers entre eux, Il existe un bourgeon presque circulaire tangent à la cardioïde au point  Chacun de ces bourgeons est appelé « bourgeon *p*/*q* ». Il s'agit de l'ensemble des points paramètres convergeant vers un cycle de période *q*.
* Enfin, chaque bourgeon porte lui-même des bourgeons, représentatifs d'un périodicité différente, selon le même schéma. Par exemple, le bourgeon à gauche du grand bourgeon de période 2 a une périodicité de période 4. Le bourgeon immédiatement à sa gauche est de période 8, puis 16, etc., suivant ainsi le motif de doublement de période du diagramme de bifurcation de l'équation logistique.

Antennes et périodicités

Les bourgeons sont également surmontés de filaments en forme d'antenne. Le nombre d'antennes est directement lié à la périodicité du bourgeon. Ainsi, compter le nombre d'antennes permet de déterminer la périodicité du bourgeon.

Dessiner l'ensemble[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=13) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=13)]

On a vu plus haut que dès que le module d'un *zn* est strictement plus grand que 2, la suite diverge vers l'infini, et donc *c* est en dehors de l'ensemble de Mandelbrot. Cela nous permet d'arrêter le calcul pour les points ayant un module strictement supérieur à 2 et qui sont donc en dehors de l'ensemble de Mandelbrot. Pour les points de l'ensemble de Mandelbrot, le calcul n'arrivera jamais à terme, donc il doit être arrêté après un certain nombre d'itérations déterminé par le programme. Il en résulte que l'image affichée n'est qu'une approximation du vrai ensemble.

Bien que cela n'ait aucune importance sur le plan mathématique, la plupart des programmes générant des fractales affichent les points en dehors de l'ensemble de Mandelbrot dans différentes [couleurs](http://fr.wikipedia.org/wiki/Couleur). La couleur attribuée à un point n'appartenant pas à l'ensemble dépend du nombre d'itérations au bout desquelles la suite correspondante est déclarée divergente vers l'infini (par exemple quand le module est strictement supérieur à 2). Cela donne plusieurs zones concentriques, qui entourent l'ensemble de Mandelbrot. Les plus éloignées sont constituées des points c pour lesquels la suite (zn) tend « plus rapidement » vers l'infini. Ces différentes zones délimitent d'une manière plus ou moins précise l'ensemble de Mandelbrot.

**Un zoom commenté**[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=14) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=14)]

Cliquer sur cette image pour lancer l'animation

L'ensemble de Mandelbrot doit beaucoup sa popularité à la variété et la beauté de ses structures et à la profondeur infinie de ses détails, mais aussi à la possibilité de l'explorer soi-même à l'aide des nombreux logiciels aujourd'hui disponibles.

La séquence d'exploration commentée ci-dessous est un zoom profond vers la valeur de c = –0,743643887037151 + 0,13182590420533i, à travers nombre de motifs caractéristiques. Le rapport de grossissement entre la dernière et la première image est d'environ 60 milliards. La séquence entière (et sa suite jusqu'à un grossissement d'environ 1030) peut être visionnée sur l'animation ci-contre.

|  |  |
| --- | --- |
| **Étape** | **Description** |
|  | L'ensemble de Mandelbrot initial. Si la dernière image était en taille réelle, cet ensemble de Mandelbrot aurait une taille de 3 millions de kilomètres et sa frontière présenterait une quantité astronomique de structures fractales.[[pas clair]](http://fr.wikipedia.org/wiki/Wikip%C3%A9dia:Style_encyclop%C3%A9dique#Clair)  Nous allons zoomer sur la vallée située entre la cardioïde et le bourgeon principal. |
|  | Cette vallée a été baptisée « vallée des hippocampes ». |
|  | À gauche, des spirales doubles, à droite les « hippocampes ».  Nous zoomons sur l'un d'eux. |
|  | Un « hippocampe », tête en bas. Cet hippocampe est composé de 25 « antennes » consistant en 2 groupes de 12 et un filament relié à la cardioïde. Nous en déduisons que le bourgeon qui le porte a une périodicité de 25. Le point de rencontre de ces antennes est un « [point de Misiurewicz](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Point_de_Misiurewicz&action=edit&redlink=1) [**(en)**](http://en.wikipedia.org/wiki/Misiurewicz_point) ». Sur la plus longue antenne, celle qui mène à la « queue » de l'hippocampe, on reconnaît une copie réduite de l'ensemble de Mandelbrot, appelée aussi « satellite ».  Nous zoomons maintenant sur la queue de l'hippocampe. |
|  | L'extrémité de la queue, enroulée en spirale, est aussi un point de Misiurewicz.  Nous zoomons sur le haut de l'image. |
|  | Une section de la queue. Cette structure complexe est composée d'un seul et unique chemin qui mène jusqu'à l'extrémité de la queue. L'ensemble de Mandelbrot est un ensemble [simplement connexe](http://fr.wikipedia.org/wiki/Simplement_connexe), ce qui signifie qu'il n'y a ni boucles, ni ilots.  Zoomons vers le centre de l'image. |
|  | Un deuxième « satellite » (ou « minibrot ») apparait, au cœur de ce carrefour. Un exemple d'autosimilarité : La frontière de l'ensemble de Mandelbrot contient une infinité de copies de lui-même. Quel que soit le lieu on l'on zoome on en trouvera toujours au moins un. Les deux spirales sont le début d'une série de couronnes concentriques, avec le satellite en son centre.  Nous zoomons vers ce satellite. |
|  | Chacune de ces couronnes est composée de spirales similaires. Leur nombre s'accroit en puissances de 2, un phénomène typique de l'environnement des satellites. Le chemin vers l'extrémité de la queue entre dans le satellite par le point d'inflexion de la cardioïde et ressort par l'extrémité son antenne. |
|  | L'antenne du satellite. On peut distinguer plusieurs satellites du deuxième ordre.  Zoomons en haut à droite de l'image. |
|  | La « vallée des hippocampes » du satellite. Toutes les structures déjà rencontrées précédemment réapparaissent. |
|  | Spirales doubles et hippocampes. Contrairement à la première vallée, celle-ci est peuplée, en plus, de légères structures spirales. Dans un satellite d'ordre n cohabitent n+1 types de structures différentes. Pour ce satellite d'ordre 1 coexistent donc 2 types de structures différentes.  Nous zoomons sur une double spirale, à gauche de la vallée. |
|  | Double-spirale avec satellites du deuxième ordre.  Nous zoomons, maintenant, sur une des structures dentelées blanches en haut à droite de l'image. |
|  | Ces structures légères rappellent celles de certains ensembles de Julia. Là encore, ce motif très torturé n'est constitué que d'un seul filament.  Nous zoomons sur le « double-crochet » que l'on distingue à droite de l'image. |
|  | Ce double crochet rappelle, encore une fois, la forme en spirale de la queue d'un hippocampe.  Nous zoomons vers le motif central. |
|  | Des îlots apparaissent, à la manière d'une [poussière de Cantor](http://fr.wikipedia.org/wiki/Poussi%C3%A8re_de_Cantor). La forme générale est celle d'un ensemble de Julia *Jc*. Toutefois, contrairement à un ensemble de Julia, ces points sont tous connectés, car nous sommes toujours dans l'ensemble de Mandelbrot. La forme générale de cet ensemble n'est pas celle de l'ensemble de Julia associé à cette position. Il s'agit de l'ensemble de Julia que nous aurions obtenu si nous avions sélectionné, au début de notre exploration, un point à proximité d'une double spirale au lieu d'un hippocampe.  Ces structures sont elles-mêmes connectées à une structure centrale que nous pourrions découvrir si nous poussions encore plus loin le grossissement. En théorie, le grossissement pourrait ainsi être infini, et faire découvrir sans cesse de nouvelles structures. Pour en voir davantage, cliquer sur l'animation en haut à droite de cette section. |

Généralisations et variantes[[modifier](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&veaction=edit&vesection=15) | [modifier le code](http://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Ensemble_de_Mandelbrot&action=edit&section=15)]

Animation de l'ensemble pour d allant de 2 à 5 (voir la formule de généralisation)

Méthode [*Buddhabrot*](http://fr.wikipedia.org/wiki/Buddhabrot)

L'ensemble de Mandelbrot peut être généralisé des puissances *d* supérieures à 2 pour *z* ↦ *zd + c*. Ces généralisations sont parfois appelées « multibrot », mais pour certains auteurs (comme McMullen), le terme « ensemble de Mandelbrot » doit également désigner ces généralisations.

En 3 dimensions, il n'existe pas de structure de corps comparable à celle des nombres complexes, donc pas d'extension « naturelle ». Notons toutefois l'extension de Daniel White (2009) baptisée « [Mandelbulb](http://fr.wikipedia.org/wiki/Mandelbulb)[21](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-21). »

En 4 dimensions, l'extension naturelle à l'ensemble des [quaternions](http://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternions) a été étudiée par JAR Holbmok en 1987[22](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-22).

Une modification de la méthode de traçage, proposée par Melinda Green en 1993, mène à une variante baptisée « [Buddhabrot](http://fr.wikipedia.org/wiki/Buddhabrot) »[23](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_de_Mandelbrot#cite_note-23). Il présente la densité des points visités par les orbites de valeurs[[Quoi ?]](http://fr.wikipedia.org/wiki/Aide:Pr%C3%A9ciser_un_fait) de c qui divergent, donc choisies à l'extérieur de l'ensemble de Mandelbrot.